DAG GULAKER & KJARTAN TVETE

Hvor krum er jorden?

eller: Hvor feil kan det bli?

Hur långt är det till horisonten? Hur hög är ”toppen” av sjön? Hur långt är det till jordens medelpunkt? Frågor som dessa kan förhoppningsvis inspirera elever till matematisk verksamhet i ”verkligheten”.

Fra Bergen skal man seile rakt vest mot Hvarf på Grønland, og da seiler man nord om Shetlandsøyene således at man så vidt kan se landet i siktbart vær, men sønnenom Færøyene og da slik at man bare ser landet i lav høyde, ... (Fra en norrøn seilingsbeskrivelse, Bergen – Grønland)

Vi skal se på en problemtype knyttet til naturgeografi, der innledende spørsmål kan være:

– Hvor høy er ”toppen” av Mjøsa?

– Hvor langt ut over havet kan en se fra en høyde på for eksempel 100 meter?

Problemene har den motivasjonspsykologiske fordel at intuisjonen vår blir utfordret. Riktignok er jorda rund, men lokalt, som for eksempel over Mjøsas område, er den vel å regne som flat? (For mer om fenomenet, se for eksempel [1], [2], [3] eller søk på nettet på ”jordas (jordens) krumning”).

Problemtypen kan angripes fra forskjellige nivåer av skolematematikken. (Derfor er et par avsnitt med trigonometri og rekker tatt med.) Dessuten kan emnet innby til å gjøre praktiske undersøkelser der matematikk og naturgeografi står sentralt. Løsningsskissene nedenfor vil forhåpentlig inspirere til å la elever/studenter prøve problemene, med passende lærerstøtte.

Dag Gulaker *och* ***Kjartan Tvete***
arbetar vid Högskolan i Nord-Trøndelag.
dag.gulaker@hint.no
kjartan.tvete@hint.no

Med Pytagoras og kvadratsetninger

Vi finner ”høyden” h av et vann med lengde a. Se figuren, der S er jordsentret:

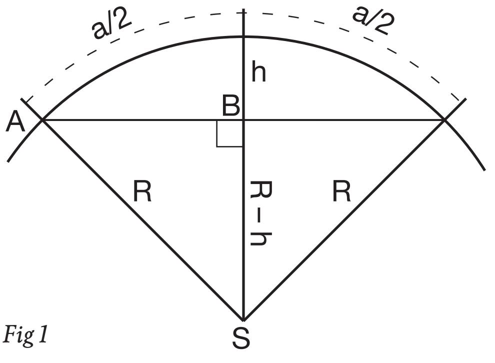

Fig 1

Når vannets lengde er liten i forhold til jordradien R kan vi prøve med å si at korden (eller halve korden) er tilnærmet lik buen (eller halve buen). Av den rettvinklede trekanten ABS fås da:

$$\left(R-h\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=R^2 \text{ eller}$$

$$R^2-2Rh+h^2+\frac{a^2}{4}=R^2 \text{ eller } \; 2Rh-h^2=\frac{a^2}{4}$$

Høyden h kan jo løses ut av denne 2.-gradsligningen. Men for små vann blir leddet h^2 svært mye mindre enn $2Rh$, og neglisjeres h^2 får vi tilnærmingsformelen:

(1) $$h \approx \frac{a^2}{8R}$$

Bruker vi en verdi for jordradien på 6370 km får vi for en innsjø på 120 km (a la Mjøsa) en h-verdi på 283 m! Dette tallets størrelse kolliderer som regel kraftig med ”den sunne fornuft” og hva en ville svart ved gjetning. – Vi må vel ha regnet galt!?

Med trigonometri

Se på fig 1 ovenfor og merk av vinkel ASB.

Kall denne u. Da er $\cos u=\frac{BS}{AS}=\frac{R-h}{R}$. Det gir $h=R\left(1-\cos u\right)$. I radianer er

$u=\frac{a/2}{R}=\frac{a}{2R}$. Dermed fås:

(2) . $$h=R\left(1-\cos\frac{a}{2R}\right)$$

For $a=120$ km gir dette h-verdien 283 m, som formel (1). Faktisk stemmer formlene nå overens ned til 1 cm. Prøv selv med et 100 mil langt ”vann”!

Med Taylorrekka for cos x: Forskjellen på formel (1) og (2)

I den korrekte formel (2) kan vi erstatte $\cos\frac{a}{2R}$ ved å bytte ut x med $\frac{a}{2R}$ i Taylorrekka $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$ Det gir:

$$\cos\frac{a}{2R}=1-\frac{\left(\frac{a}{2R}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{a}{2R}\right)^4}{24}-\frac{\left(\frac{a}{2R}\right)^6}{720}+\;\ldots$$
$$=1-\frac{a^2}{8R^2}+\frac{a^4}{384R^4}-\frac{a^6}{46080R^6}+\ldots$$

Formel (2) kan da skrives

(3) $$h=\frac{a^2}{8R}-\frac{a^4}{384R^3}+\frac{a^6}{46080R^5}-\ldots$$

For ”små” a er $a/2R$ nær 0, og rekka konvergerer raskt. Vår formel (1) svarer altså til at vi bare tar med 1. leddet rekka (3) (eller ledd t o m av grad 2 fra Taylorrekka). I en rekke som (3) er feilen ved å stoppe etter et visst antall ledd, mindre enn tallverdien av det neste leddet, dvs. mindre enn $a^4/384R^3$ for formel (1), – et uttrykk som her gir et meget godt bilde av feilen.

Siktlinja til horisonten

Dette problemet, å finne lengden s av siktlinja til horisonten fra en øyehøyde h over havet, kan også angripes med Pytagoras setning:

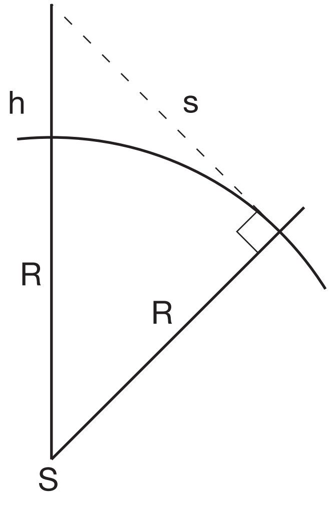

Fig 2

Figuren tilsier at $s^2+R^2=\left(R+h\right)^2$ som etter forenklinger og ny neglisjering av h^2 gir:

(4) $$s \approx \sqrt{2R}\cdot\sqrt{h}$$

Denne kan skrives

(5) $$s \approx 3570 \cdot \sqrt{h}$$

når vel å merke lengdeenheten er meter. På grunn av lysbrytning i atmosfæren ser en i praksis noe lengre. En formel som korrigerer for dette er

(6) $$s \approx 3830 \cdot \sqrt{h}$$

Fra en øyehøyde på 10 meter blir avstanden til dit hvor himmel møter hav ikke lengre enn vel 12 km.

Vi antyder noen mulige oppgaver/aktiviteter:

1. Hva tror du høyden av et 1 km langt vann er? Finn den.
2. Hvor langt utover vannet ser du når du sitter og ror?
3. Tegn og studer grafer for funksjonene bestemt av (1) og (6).
4. En artikkel i Adresse-avisa (13/7-98) hevdet at det sydligste stedet i landet der en kan se midnattsola er fra fjellet Heilhornet lengst sør på Helgeland. – Kan det stemme?
5. Se på figur 3 nedenfor. (Vi ”løfter” korden opp av vannet til tangering.) Vis hvordan formel (4) ved de antydede tilnærminger nå kan utledes fra formel (1).

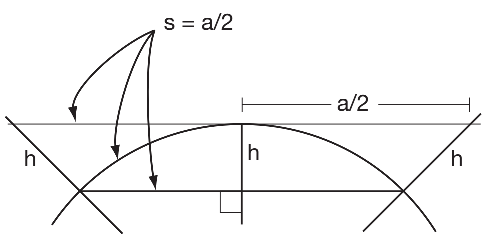

Fig 3

Praktiske undersøkelser – også av jordens radius?

Tar en med elevene til en fjord eller et vann av bare noen kilometers bredde/lengde, er det, utrolig nok, meget enkelt å la dem få en sterk, visuell opplevelse av at vannet virkelig ”slår kul på seg”. Det er bare å se på utvalgte objekter (helst i kikkert) i stranda på den andre siden mens en senker/hever sin øyehøyde. Ting vil plutselig forsvinne/dukke opp igjen. Formel (6) kan utprøves på ulike vis. Men særlig spennende, og etter vink fra Tangentens redaktør: Siktlinjeformelen (4) må kunne prøves til beregning av jordas radius, ut fra målinger av s og h! – Fig 4 a, b og c gir noen ideer til forsøksopplegg:

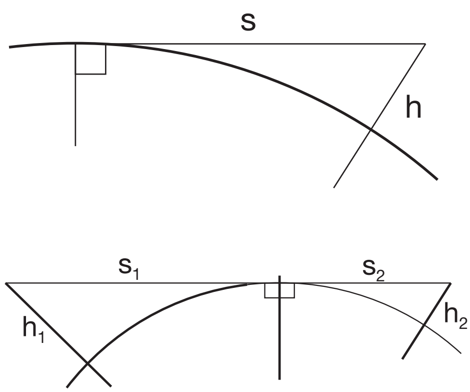

Fig 4 a, b

Fig. 4 a er et spesialtilfelle av 4 b. To parter samarbeider fra hver sin side av en fjord eller en sjø. Formel (4) gir $s_1 = \sqrt{2R} \cdot \sqrt{h_1}$ og $s_2 = \sqrt{2R} \cdot \sqrt{h_2}$ Kalles avstanden mellom observatørene for s fås

$s = s_1 + s_2 = \sqrt{2R}\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}\right)$ eller

$R = \dfrac{s^2}{2\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}\right)^2}$ Fig. 4c er en forenkling av en ide gitt av A.I. Vistnes i [3]. Denne baserer seg på tilgang til fri horisont. Anta at ved å klatre opp til et punkt P ser en toppen H akkurat i horisonten. Høyden h_1 må finnes, likeledes h_2, ved samme vannstand. Formel (4) gir oss igjen uttrykk for s_1 og s_2, disse subtraheres, og når avstanden mellom P og toppen av H kalles s, fås $R = \dfrac{s^2}{2\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}\right)^2}$

Vi jakter på R – Fra et forsøk på forsøk

I det nye uteskolebegrepets ånd beveget vi – gamle tavlelærere og papirpedagoger – oss

Måling nr.	Dato	s (meter)	h_1 (meter)	h_2 (meter)	R (km)
1	22.9.04	6350	2,30	1,50	2682
2	23.9.04	6350	2,85	0,85	2959
3	23.9.04	6350	0,80	2,80	3058
4	23.9.04	6370	0,12	5,10	2928
5	1.10.04	2775	0,15	0,31	4320

ut i den fysiske verden for å gjøre observasjoner, i samsvar med fig. 4b. Utstyr: Hver vår feltkikkert m/stativ, 45× forstørrelse, hver vår hvite isoporplate (60 cm × 120 cm), svart plast, tommestokk og mobiltelefoner. Den ene ser i kikkerten mens den andre senker svart plast nedover plata til den kommer ut av synet. Vi gjorde 5 måleforsøk, de 4 første over samme fjordstrekning mellom valgte punkter i fjæra på Levangernesset og Ytterøya, det siste over en lengde mellom to strandpunkter ved Tomtvatnet i Levangermarka. Resultatene sees i tabellen: (*s* er beregnet v.h.a. kart i målestokk 1:50 000.)

(– Om vi var på utflukt til Mars?...) Noen kommentarer: Ved 1. måling var det en god del bølger, kanskje med opptil en 1/2 meters høyde, – noe som kan forklare at denne *R*-verdien ble den klart laveste. For de 4 andre målingene lå sjø/vann ganske stille. Vi erfarte likevel at det ikke er helt enkelt å se akkurat når den gjenværende hvite platekanten går ut av syne. Antagelig mistet vi den for tidlig. Men rart er det at den målingen som vi opplevde som den klart skarpeste observasjonen, måling 4, altså med kikkerten relativt høyt plassert, ikke ga en vesentlig høyere *R*-verdi. Målingen over den kortere ferskvannsdistansen ga en klart høyere *R*, dog rent for liten den også. Vi bemerker at betydningen av lysbrytningen, som er neglisjert ovenfor, skulle bidratt til forhøyede *R*-verdier, ikke omvendt. Temperaturen i luften anslås alle dager til ca 12 – 14° C, i vannet litt lavere.

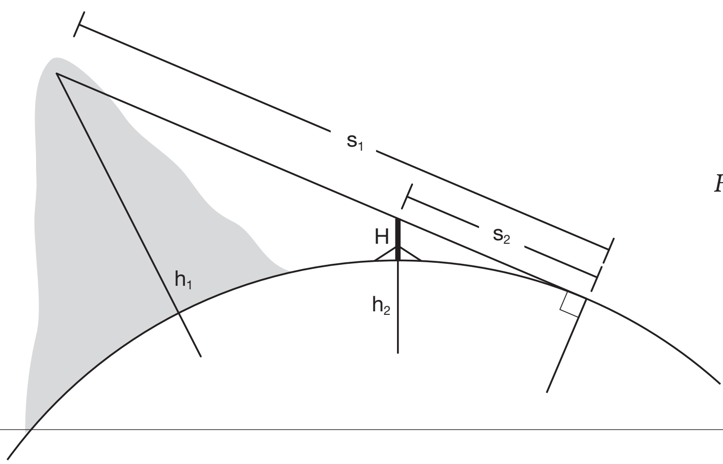

Fig 4 c

Oppfordringer/Oppfølginger

- Kan andre Nämnaren-lesere bidra med forbedringer av vårt opplegg eller med forklaringer av feilkildene?
- Kanskje kan observasjoner basert på fig. 4 a eller 4 c føre til mer valide *R*-verdier? Kanskje flere enn oss kan få lyst på å prøve undersøkelser når badetemperaturen igjen blir god, eller om en har adgang til åpent hav eller en stor innsjø med fri horisont?
- Kan lesere finne og rapportere om velegnede observasjonssteder?
- Kan fiskere ha benyttet kunnskaper om siktlinja til for eksempel avstandsbedømming fra land?

Tidlige målinger av jordas størrelse

Klassikeren fra Oldtiden er Eratostenes måling (ca år -230), som bygger på følgende enkle ide, her kort gjengitt (se for eksempel [1], [2] eller på nettet): Dersom vi for en gitt sirkelbue b kjenner buens sentralvinkel u, så kan lett sirkelens omkrets finnes.

Det gjaldt da å finne u ad omveier. Eratostenes observerte solstrålenes avvik fra en lokal loddlinje i Syene (nå Aswan), og i Alexandria, midt på dagen midtsommers. (Sola sto da faktisk i zenit i Syene, men det er i prinsippet ikke viktig). Ved parallelle linjer gjenfinnes u oppe ved jordoverflata, se fig 5. Eratostenes fant $b \approx 5000$ stadier og $u \approx 1/50$ av 4 rette vinkler (360°), som ga omkretsen $50 \times 5000 = 250\,000$ stadier, som igjen er 40 000 km dersom 1 stadion = 160 m. Imponerende! For et skoleopplegg etter denne metoden, se G. Hjalmarsson [5].

Resultatene kan nok her bli langt sikrere enn med vår prinsipielt forskjellige metodetype (uten vinkelmåling), når de to stedene har god avstand. Likevel er det nærliggende å formode at noen nokså tidlig måtte ha kommet på, og latt seg friste til å gjøre et forsøk av lignende type som vårt, med andre hjelpemidler enn kikkert og mobiltelefon, og slik fått i det minste en viss peiling på jordas størrelse. Kravene til regneferdigheter kan imidlertid bli noe større, men flere av de gamle kulturene skulle vel ha klart beregningen (særlig om $h_2 = 0$). For et par andre gamle forsøk på måling av jordradien, se [6].

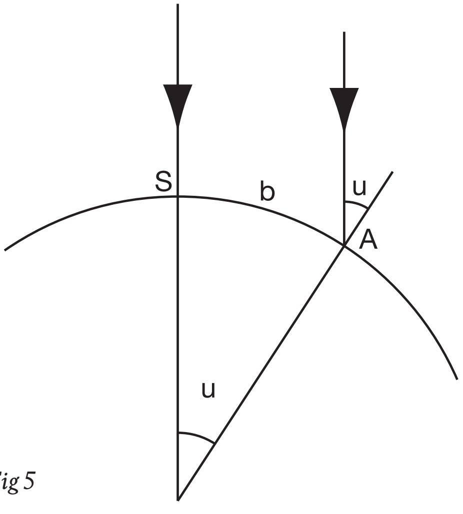

Fig 5

Et par oppgaveideer:

1. Fra to steder på samme meridian måles den vinkelen som siktlinja til polarstjerna danner med en loddlinje til h.h.v. 46°25′ og 51°38′. Avstanden mellom stedene beregnes til 575 km. Tegn figur, studer geometrien, forklar hvordan sentralvinkelen ved jordsentret nå er bestemt, og beregn jordas omkrets. (Har tidspunktene for observasjonene noe å si når sola er byttet med polarstjerna ?)

2. Vi har brukt begrepet horisont om der hvor himmel møter hav. Det astronomiske faguttrykket horisont betyr tangentplanet til det stedet en observatør står på jorda. I navigasjon var det viktig å registrere den vinkelen for eksempel sola dannet med denne "sanne" horisonten. Sekstanten, og den eldre Jakobstaven, registrerer vinkelen mellom solretningen og siktlinja til *synsranden*, eller *kimingen*, – der himmel møter hav. Feilen kalles kimingdalingen.- Finn denne uttrykt ved observatørens øyehøyde h over havet, når lysbrytningen sees bort fra. (Et hjelpesvar: Et kjent uttrykk, når lysbrytingseffekten tas hensyn til, er $1{,}78\sqrt{h}$ bueminutter, der h er i meter. Og husk: Lysbrytningen "løfter" synskretsen.) Til slutt: – Ser du at formelen for kimingdalingen gir en ny mulighet for undersøkelser av jordradien?

REFERANSER

[1] H. Isdahl: Er jorda flat eller rund?, *Tangenten* nr 4 / 2002

[2] K. Tvete: *Geometri - Jordmåling*, Caspar.

[3] "Fra fysikkens verden", *Sommernøtter*, nr 2 / 2000

[4] www.karlscalculus.org/measureearth.html

[5] G. Hjalmarsson: "Lyser solen i Skara?", Nämnaren , nr 1 1986

[6] J.L. Heilbron: Measuring the Earth, Classical and Arabic, *Encyklopædia Britannica*