Svar och korta lösningar

Många problem kan lösas på flera sätt. Följande förslag ger inte en heltäckande beskrivning. I avsnittet *Arbeta vidare och utveckla problemidéerna* presenteras andra förslag till lösningar och olika möjligheter att bredda och fördjupa arbetet kring uppgifternas innehåll. Diskutera olika lösningsförslag i klassen.

1. (A) När bråken förkortats ser vi att A är störst:
A: 7/8 B: 6/7 C: 5/6 D: 4/5 E: 3/4

2. (B) Det stora hjulets omkrets är tre gånger så stor som det lilla hjulets eftersom radien är tre gånger så stor. För att kuggarna skall haka i varandra så ska hjulen rotera åt motsatta håll.

3. (C) Mellan 5 och 21 är det 16 h, antalet minuter därutöver är 32. Hälften av detta är 8 h och 16 min vilket ger 13.09.
Detta kan tecknas

$$4.53 + \frac{21.25 - 4.53}{2} = 13.09$$

4. (D) Summan av de skuggade trianglarnas area är hälften av arean av rektangeln *ABCD*. De ej skuggade trianglarna har tillsammans samma area som rektangeln *OPRS*. Den skuggade delen är 1/2 + 1/4 = 3/4 av hela arean.

5. (E) Andreas åt minst hälften av kakorna, dvs 9 st. Om han hade ätit färre skulle någon av de andra kunna ha ätit lika många eller fler.

6. (D) Det finns 33 tal mellan 1 och 100 delbara med tre: 3, 6, 9, ..., 96, 99. Till detta ska vi addera antalet tal som slutar på tre men ej är delbara med tre, 13, 23, 43, 53, 73, 83.

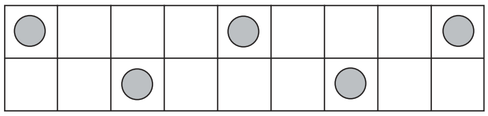
7. (A) Det finns två påståenden om Fabian varav ett är felaktigt. Eftersom Maria har ett fyrfota djur och inte tycker om katter så har hon en hund och då kan inte Fabian ha det.

8. (A) Efter första dagen återstår hälften av utrymmet. Efter andra dagen återstår 2/3 av halva utrymmet, dvs 1/3. Efter tredje dagen återstår 3/4 av denna tredjedel dvs 1/4 av hela utrymmet.

9. (B) Biets väg upprepas efter 5 celler. När det passerat 13 celler och rör sig in i den 14:e är det detsamma som att gå in i cell nr 4.

10. (C) När man prövar med 5 och 4 lådor plommon, så går det inte att få ihop åtta lådor frukt för 23 euro. Med 3 lådor plommon, 1 låda päron och 4 lådor äpplen går det.

11. (A) Se figur



12. (D) Gå igenom alternativen:
A: Om Alfred luras så luras även Christian och Daniel.
B: Om Benjamin luras så luras även Christian och Daniel.
C: Om Christian luras så luras även Benjamin.
D: Om Daniel luras så talar de övriga sanning.

13. (A) Från skålarna *P* och Q kan man avläsa att ”triangeln” väger mindre än ”cirkeln”.

14. (C) I varje grupp spelas 6 matcher.

Omgång	Grupper	Totala antal matcher
1	8	8·6 = 48
2	4	4·6 = 24
3	2	2·6 = 12
4	1	1·6 = 6
final		1
summa		91

15. (D) Om tre söndagar i en månad infaller på jämna datum så har den månaden fem söndagar. Den 1:a, 3:e och 5:e söndagen inträffar på jämna datum. Eftersom det är 7 dagar i en vecka och högst 31 dagar i en månad så inträffar söndagarna 2:e, 16:e och 30:e i månaden.

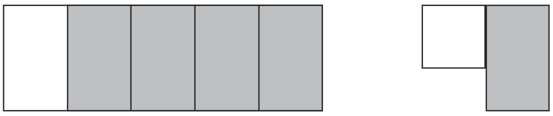
16. (A) På varje yttersida är det 4 småkuber som har en sida målad. I gångarna har alla kuber två målade sidor. Det ger totalt 6 x 4 = 24 kuber.

17. (B) Två cirklar skär varandra i högst 2 punkter. En linje skär cirklarna i högst 4 punkter och en annan linje i högst 1 punkt.
Det blir 2 + 3 · 4 + 3.

18. (E) Vi tänker oss provianten indelad i 60 dagsransoner. De 30 skeppsbrutna äter upp en sjättedel. De återstående 50 räcker då till 150 personer.

Vi kan också "gissa" eller anta x personer. Då ska $x \cdot 60$ svara mot lika många matransoner som $(x + 30) \cdot 50$. Sedan löser vi ekvationen.

19. (A)

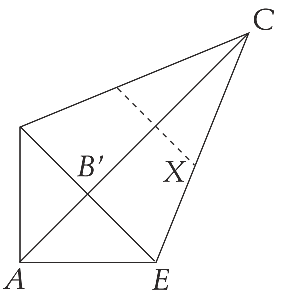


vita grå blåögda

Av de vita mössen är 50 %, dvs hälften, blåögda och av de grå mössen är 25 %, dvs fjärdedelen, blåögda. Sammanlagt är 75 = 3·25 blåögda, svarande mot figuren till höger. Figuren till vänster svarar alltså mot 10·25 = 250.

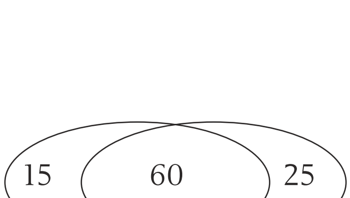
20. (C) Varje pojke vägs fyra gånger och summan av vikterna är 956 kg. Pojkarnas sammanlagda vikt 956/4 kg = 239 kg.

21. (D) Gör vikningen praktisk enligt texten.

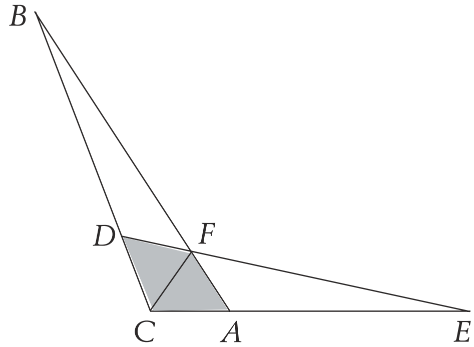


I triangeln $B'CE$ är vinkel C 22,5° och vinkel E är 67,5°. När vi viker längs den streckade linjen får vi den sökta vinkeln X till 112,5°.

22. (E)



23. (D)



I figuren har vi dragit linjen CF. Arean av triangeln CFA är hälften av den sökta arean som vi kallar T. Triangeln CFA:s area är också 1/3 av arean av triangeln AFE eftersom $AC = 1$ och $EA = 3$. Det betyder att $T + 3 \cdot (T/2) = S$, dvs $T = 2S/5$.

24. (B) Antag att trappans längd är 180 m. När Mr Bean går uppför den stillastående rulltrappan är hans hastighet 180/90 m/s = 2 m/s. När han åker är den 180/60 m/s = 3 m/s. När han både åker och går är den 5 m/s, vilket ger 36 s.

Att arbeta vidare och utveckla problemidéerna

Det är vår förhoppning att ni ska finna många intressanta uppslag och att denna problemsamling ska kunna inspirera undervisningen under många lektioner. Här är några förslag till arbeten. Många av känguruproblemen kan lösas med olika metoder t ex laborativa eller genom att man ritar och resonerar. Eleverna kan arbeta parvis eller i grupp och diskutera hur de tänkt och på så sätt komma fram till olika lösningsvarianter och vilken de finner enklast. De kan också formulera egna aktiviteter eller problem med anknytning till frågeställningar som kommer upp vid arbetet eller diskutera vad de lärt sig genom att fundera över exemplen. Till en del uppgifter har vi nedan gett direkta kommentarer om detta. Det finns naturligtvis mycket annat man kan göra. Hör gärna av er med idéer och förslag som vi kan publicera på *Kängurusidan* på *namnaren.ncm.gu.se*

Vi rekommenderar dig också att studera Nämnarens *Problemavdelning* som finns i varje nummer, med lösningar och kommentarer.

Arbeta vidare

1. Ett resonemang om vilket som är störst kan utgå från hur stor del som ska adderas för att resultatet ska bli 1 i varje alternativ.

Jämförelsen kan också göras sedan bråken gjorts liknämniga. Minsta gemensamma nämnaren: $8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 840$

A: $\frac{735}{840}$ B: $\frac{720}{840}$ C: $\frac{700}{840}$ D: $\frac{672}{840}$ E: $\frac{630}{840}$

Vi kan algebraiskt jämföra två bråk av denna typ

$$\frac{p}{p+1} \text{ och } \frac{p-1}{p}$$

för alla positiva heltal p genom att bilda differensen och undersöka om den är positiv:

$$\frac{p}{p+1} - \frac{p-1}{p} = \frac{p^2-(p-1)(p+1)}{(p+1)p} = \frac{p^2-p^2+1}{(p+1)p} =$$

$$= \frac{1}{(p+1)p} > 0$$

2. Ändra relationen mellan hjulens storlek. Hur skulle hjulen se ut för att alternativ A respektive D skulle stämma?

3. Hur ändras den lokala middagstiden på er hemort under året?

4. Hur stor del av hela rektangeln utgör arean av de vita områdena? Hur stor del är den lilla rektangeln av den stora?

Fortsätt att rita trianglar i den lilla rektangeln på samma sätt som i den stora och besvara samma frågor.

5. Ändra antal kakor och diskutera hur svaret ändras.

Sex elever åt 20 kakor tillsammans. Anders åt en, Bea två, Carl 3 och Daniella åt fler kakor än någon av de andra. Hur många åt hon minst?

6. Gör övningen på engelska. I stället för ”burr” ska det engelska ordet för talet nämnas.

Välj andra tal, t ex 4 eller 7 och diskutera likheter och skillnader.

7. Låt eleverna skriva lappar med djurnamnen och pröva sig fram. Gör egna förslag på liknande problem.

8. En enkel skiss kan vara till hjälp. Rita hela disken och stryk bort de delar som viruset äter. Hur mycket återstår efter den 5:e dagen? När kraschar hårddisken?

9. Rita den fortsatta vägen! Vad upptäcker vi då?

10. Kalla antalet äpplen för x, antalet päron y och antalet plommon z. Då gäller att

$x + y + z = 8$ eller $x = 8 - y - z$.

Det totala priset är

$2x + 3y + 4z = 23$.

Ersätts x med uttrycket ovan, fås

$2(8 - y - z) + 3y + 4z = 23$ eller

$y + 2z = 7$.

Det största värdet som z kan anta är 3.

11. Variera antalet rutor och antalet mynt i rutnätet. Sök efter mönster.

12. Låt eleverna göra egna förslag med påståenden som är sanna eller falska.

13. Samtliga skålar innehåller en fyrhörning så den kan vi bortse ifrån vid jämförelse. Från skålarna P och Q kan man avläsa att ”triangeln” väger mindre än ”cirkeln”. Den skål som skall placeras in innehåller en triangel och en cirkel, den ska alltså placeras in mellan skål P och Q.

Hur ska innehållet i den högra skålen ändras för att D ska stämma? För att E ska stämma?

En liknande uppgift finns i Benjamin 2000, nr 22. Låt eleverna göra egna problem och lösa varandras.

14. Ändra antalet lag och villkor, t ex att endast det bästa laget i varje grupp går vidare? Istället för enkelserie kan vi ha dubbelserie och avsluta med bäst av 3, 5 eller 7 matcher.

15. Vilka möjligheter finns det att två söndagar i en månad båda infaller på udda datum? Hur blir det med tre söndagar i en månad och på udda datum?

16. Bygg en modell av småkuber och resonera kring den. Hur många småkuber är det som har två respektive tre sidoytor målade? Hur många småkuber är målade på en, två respektive tre sidoytor om vi tänker oss att den ursprungliga kuben istället har sidan 3? Sidan 7?

17. Resonera kring hur många skärningspunkter som är tänkbara när man ritar ett antal cirklar. Hur många skärningspunkter är möjliga mellan två, tre, fyra, ..., n linjer?

18. Sätt in och pröva alternativen.
Gissa t ex 110: $110 \cdot 60$ ger 6600 matransoner. Med 30 till $140 \cdot 50 = 7000$ matransoner.
110 är för litet.
Gissa 140: $140 \cdot 60$ ger 8400 matransoner.
Med 30 till $170 \cdot 50$ blir det 8500 matransoner.
Med 150 personer stämmer det.
Vi kan också ”gissa” eller anta x personer. Då ska $x \cdot 60$ svara mot lika många matransoner som $(x + 30) \cdot 50$ och vi får ekvationen

$$x \cdot 60 = (x + 30) \cdot 50$$

Anta att det fanns x personer ombord från början. Alla får lika stora ransoner. Den beräknade ransonen per person och dag är

$$\frac{1}{x \cdot 60}$$

När antalet personer ökar med 30 så räcker ransonerna bara i 50 dagar, dvs ransonen per person och dag kan uttryckas som

$$\frac{1}{(x+30) \cdot 50} \quad \text{dvs} \quad \frac{1}{60x} = \frac{1}{50(x+30)}$$

som kan jämföras med ekvationen ovan.

19. Låt eleverna rita en figur eller resonera kring problemet med laborativt materiel. Procentsatserna kan förenklas eller kompliceras efter behov.

Problemet kan lösas med ekvation: Antag att det finns x möss. Av dessa är 20% vita och av de vita är 50% blåögda, dvs 10% av mössen är vita och blåögda. Det kan skrivas $0{,}10\,x$. 80% av mössen är grå och av dem är 25% blåögda, dvs 20% av mössen är grå och blåögda eller $0{,}20\,x$. Totalt antal blåögda möss är 75. Det ger ekvationen $0{,}30\,x = 75$.

20. Kalla pojkarnas vikt a, b, c, d och e. Bilda alla par av vikter:

$$\begin{aligned}
a + b &= 90\\
a + c &= 92\\
a + d &= 93\\
a + e &= 94\\
b + c &= 95\\
b + d &= 96\\
b + e &= 97\\
c + d &= 98\\
c + e &= 100\\
d + e &= 101
\end{aligned}$$

I vänsterleden förekommer varje vikt fyra gånger. Summeras vänster och höger led var för sig får vi $4(a + b + c + d + e) = 956$ och $a + b + c + d = 239$.

21. Låt eleverna vika en kvadrat enligt text och figur och diskutera hur man får fram den sökta vinkeln, jfr den tidigare givna lösningen.

Här följer ett alternativt resonemang:
Kalla de två nya hörnen i fyrhörningen efter den första vikningen för E och F. Det finns två kongruenta trianglar ACE och ACF. Vinkeln vid A är 45° och vinkeln vid C är $45°/2 = 22{,}5°$.
$B = 180° – 45° – 22{,}5° = 112{,}5°$.

Efter nästa vikning uppkommer en femhörning. De två nya vinklarna är lika stora, kalla dem x, de övriga tre är kända. Vinkelsumman i en femhörning ger ekvationen

$$2x + 2 \cdot 112{,}5 + 90 = 540$$
$$x = 112{,}5°.$$

Hur stora är de andra vinklarna i femhörningen?

Föreslå eleverna att pröva andra vikningar och formulera nya problem.

22. Alternativt resonemang för diskussion:
Sammanlagt talar 85% + 75% = 160% engelska, franska eller båda språken. Det betyder att 160% – 100% = 60% av befolkningen talar båda språken.

Låt eleverna göra egna problem av denna typ och diskutera hur man formulerar och i diagram representerar olika utsagor.

23. Diskutera hur möjligheterna att välja rätt bland alternativen ökas om man ritar en mer skalenlig figur. Vilket värde har figurer som underlag för resonemang och argument i samband med lösning av matematikproblem?

Hur lång ska $CB = CE$ vara för att alternativ A ska vara korrekt istället för alternativ D? Vi antar att $DC = AC$ fortfarande har längden 1.

24. Diskutera olika sätt att resonera kring och lösa denna uppgift. Här är ett alternativ att jämföra med det tidigare givna:
Antag att trappans längd är x meter. När Mr Bean går uppför den stillastående rulltrappan är hans hastighet

$$\frac{x}{90} \text{ m/s.}$$

När han åker är hans hastighet $\frac{x}{60}$ m/s.

När han åker och går samtidigt

$$\frac{x}{90} + \frac{x}{60} \text{ m/s} = \frac{5\,x}{180} \text{ m/s} = \frac{x}{36} \text{ m/s.}$$