UPPSLAGET

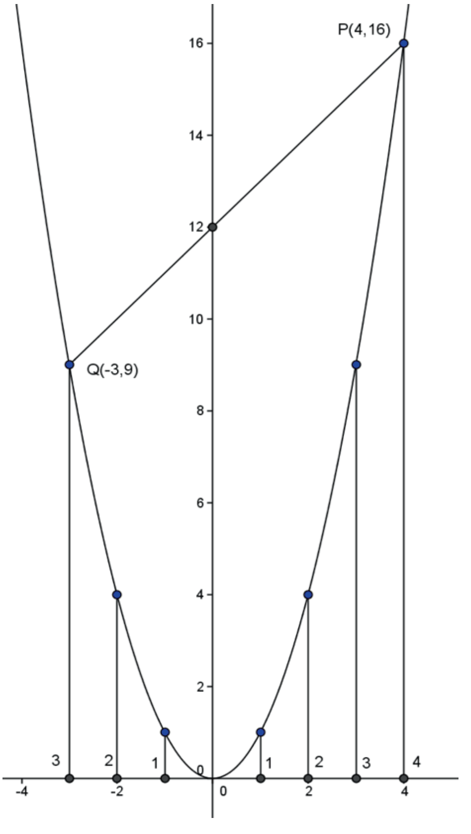
Gångerparabeln

När en klass besöker ett science center är intresse och engagemang ofta stort på plats. Men vad händer sedan? Vilken kunskap får eleverna faktiskt med sig? Här ges ett exempel på hur en aktivitet kan efterarbetas i den fortsatta matematikundervisningen, i detta fall på gymnasiet.

Vitensenteret i Trondheim, vitensenteret.com, är ett science center som har fantastiska saker och aktiviteter i sin utställning. Många skolklasser ägnar tid åt att prova och förstå hur allt fungerar. Några av experimenten har matematisk karaktär och här ska vi se på ett sådant. En lärare som har med en klass från gymnasieskolan kan be eleverna att prova *Gångerparabeln* för att sedan ta upp experimentet i klassrummet och analysera hur det fungerar. Vi visar hur en sådan lektion kan förberedas.

Två gymnasieelever undersöker hur Gångerparabeln fungerar.

I experimentet får eleverna se hur en parabel kan användas till att utföra multiplikationer, dvs hur den räknar gånger.



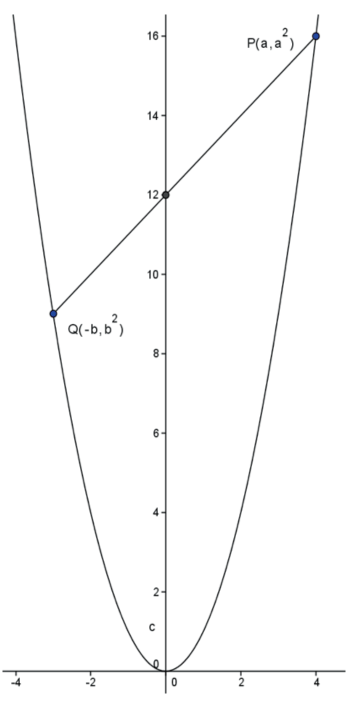
Gångerparabeln har ett antal spikar längs kurvan så att punkterna P (n, n^2) och Q (m, m^2), där n och m är heltal, är markerade till höger och till vänster om y-axeln. Från varje punkt går det en lodrät linje ner till x-axeln så att x-koordinaten till de enskilda punkterna är lätta att finna. För negativa x-värden finns tillhörande positiva värden inskrivna precis ovan x-axeln.

Ett exempel

Vi visar med hjälp av ett exempel hur metoden fungerar. Om du ska utföra multiplikationen $3 \cdot 4$ så finner du 3 och 4 på x-axeln på var sin sida om origo. Finn nu tillhörande parabelpunkter och sträck tråden från den ena till den andra punkten. Eftersom ”gångertråden” har en liten tyngd, ett lod, i varje ände så sträcks tråden och visar en rät linje mellan de båda valda punkterna. Där tråden skär y-axeln finns svaret på multiplikationen, dvs 12.

Hur kan Gångerparabeln förklaras?

Förklaring 1: Vi vill multiplicera talen a och b. Vi letar rätt på punkten P (a, a^2) och Q (b, b^2) på parabeln. Tänk på att en av dem får ett negativt x-värde. Så sträcker vi förbindelselinjen mellan punkterna.



En linje i ett koordinatsystem kan skrivas som $y = kx + m$ där k är riktningskoefficienten som visar linjens lutning och m är en konstantterm som anger skärningspunkten med y-axeln. Vår linje har lutningen

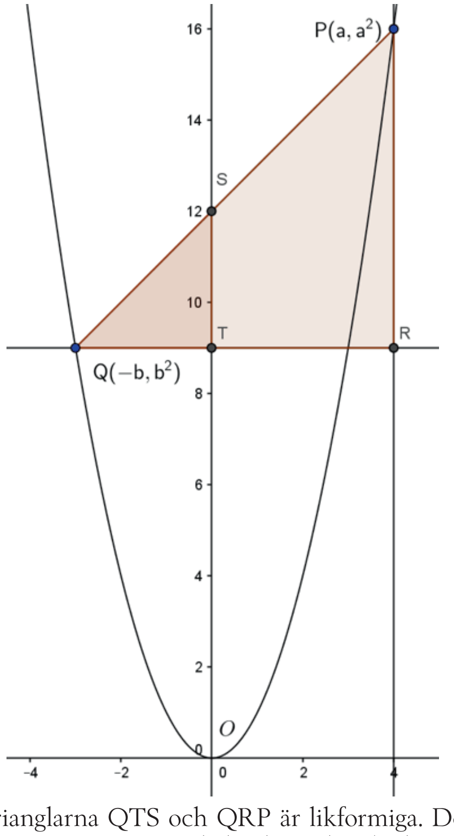
$$k = \frac{a^2 - (-b)^2}{a - (-b)} = \frac{(a + (-b))\,(a - (-b))}{a - (-b)} = a - b$$

som medför att hela linjen har ekvationen:

$$y = (-b)^2 - (a - b)\,(x - (-b))$$
$$y - b^2 = (a - b)\,(x + b)$$
$$y = (a - b)\,x + ab$$

För $x = 0$ finner vi linjens skärningspunkt med y-axeln. Den ligger i $y = ab$ och vi ser att vi kan finna produkten $a \cdot b$ bara genom att dra förbindelselinjen mellan de två valda punkterna och läsa av resultatet på y-axeln.

Förklaring 2: En annan förklaring för in lite fler geometrisk förhållanden och kan vara mer tilltalande för elever som hellre låter sig överbevisas med geometriska argument.



Trianglarna QTS och QRP är likformiga. De har en gemensam vinkel vid Q och är båda rätvinkliga. Då gäller att

$$\frac{ST}{TQ} = \frac{PR}{RQ} \quad \text{dvs}$$

$$\frac{ST}{b} = \frac{a^2 - b^2}{a + b} \quad \text{eller} \quad ST = b\,(a - b)$$

Vi är intresserade av y-värdet vid S, alltså

$$OS = OT + ST = b^2 + b\,(a - b) = ab$$

och vi har fått vårt resultat bekräftat med ett geometriskt argument.

Kreativt matematiskt tänkande

Jag, Ida Kathrine Vestvik, var med då experimentet blev analyserat i en grupp med lärarstuderande. Jag tyckte denna uppgift var engagerande eftersom Gångerparabeln vid första ögonkastet framstod som lite ”magisk”. Jag blev omedelbart nyfiken på att få en förklaring till hur den fungerade. Det var positivt att det inte fanns förslag eller några förbehåll för hur uppgiften skulle lösas. Jag kände att vi hade stor frihet och utrymme för kreativt matematiskt tänkande. Att parabeln på Vitensenteret var en konkret figur som det var möjligt att laborera med stöttade både den intuitiva förståelsen för vad uppgiften gick ut på och den fortsatta kreativa processen. Jag var vid den tidpunkten i gång med gymnasiegeometri på praktiken i min lärarutbildning, så för mig var det naturligt att prova med en geometrisk ansats. Det var kul att denna geometriska förklaring var så enkel och inte krävde avancerad geometri – det var bara att rita en enda linje (QR) för att kunna se den likformiga triangeln.

Christoph Kirfel &
Ida Kathrine Vestvik-Schütz

Detta kopieringsunderlag kan du få användning för om din klass ska arbeta med experimentet. En parabel i A4-format som du kan förstora och montera på kartong finns på Nämnaren på nätet.